

パンルヴェ方程式の大域解析

〔キーワード: 古典解析学, モノドロミ, 漸近解析〕

教授 大山 陽介

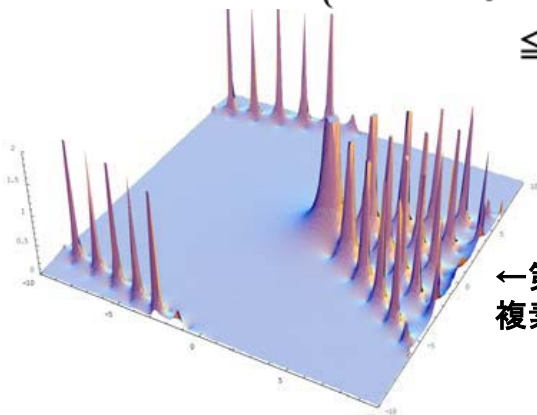
第1パンルヴェ方程式の楕円漸近解析

$$y'' = 6y^2 + x$$

$$y(x) \sim |x|^{1/2} \varphi\left(\frac{4}{5} e^{i\varphi} |x|^{5/4} - t(\varphi, s); g_2(\varphi), g_3(\varphi)\right) + O(|x|^{3/4}),$$

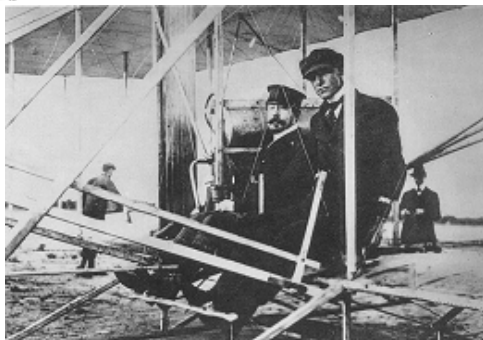
$$t(\varphi, s) = \frac{1}{2\pi i} \left(\omega_a(\varphi) \log(is_{2-2k}) + \omega_b(\varphi) \log \frac{s_{5-2k}}{s_{2-2k}} \right)$$

$$x \in D_k(\varphi, \varepsilon, s) = \left\{ x \in \mathbb{C}; \frac{(3+2k)\pi}{5} + \varepsilon \leq \varphi \leq \frac{(5+2k)\pi}{5} - \varepsilon \right\}$$



←第1パンルヴェ関数の
複素平面での極の位置

後に仏首相をつとめた
Paul Painlevéは1908年
に世界で始めて飛行
機に乗った数学者でも
ある。左がPainlevé, 右
が操縦者であるライト
兄弟の兄Wilber



内容:

微分方程式の解をある点の近くで求めた後、その解が遠方でどういう振る舞いを示すのか調べることは、数理科学では基本的な問題である。しかし、**微分方程式の大域問題**は線型方程式の場合ですら完全に解くのは困難である。

「**パンルヴェ方程式**」は1900年頃に発見された非線型微分方程式である。その解は複素領域内でどこまでも解析接続可能という性質を持っている(パンルヴェ性)。このため、非線型方程式でありながら大域的性質が調べやすく「非線型特殊函数」という側面を持っている。また、パンルヴェ方程式は線型微分方程式の「**モノドロミ保存変形**」として得られることから、パンルヴェ方程式の局所解がわかれば、対応する線型方程式の大域構造を決定できる。線型方程式の大域構造→パンルヴェ方程式の局所的挙動→パンルヴェ方程式の大域構造というステップで非線型方程式であるパンルヴェ方程式の解の全体の構造を把握できる・・・というのが戦略である。代数幾何や表現論など代数的な手法と解析的な手法を合わせて攻略しつつ、数理物理学など応用数学のアイデアを逆に純粋数学に取り入れて解析していく必要がある。

分野: 数学

E-mail: ohyama@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7541

Fax: 088-656-7541

HP: <http://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~ohyama/index.html>



非線形現象の数理解モデルと数学解析

[キーワード: 非線形解析, エネルギー減衰, PDEs]

教授 小野 公輔

1. Linear Dissipative Wave Equation:

$$\begin{cases} (\square + \partial_t)u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1) & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

[Energy Decay in Energy Spaces]

$$(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$\Rightarrow E(u(t), \partial_t u(t)) \leq C(1+t)^{-1}$$

[Sharp Decay] $m \geq 0$, $N = 2n$ or $2n+1$

$$(u_0, u_1) \in (H^{m+1}(\mathbb{R}^N) \cap W^{n,1}(\mathbb{R}^N)) \times (H^m(\mathbb{R}^N) \cap W^{n-1,1}(\mathbb{R}^N))$$

$$\Rightarrow \|\partial_t^k \nabla_x u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C(1+t)^{-k-\frac{|\beta|}{2}-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{q})}$$

$$(1 \leq q \leq 2, 0 \leq k+|\beta| \leq m, k \neq m)$$

2. Nonlinear Degenerate Dissipative Kirchhoff Equation:

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 u - (\int_{\Omega} |\nabla_x u(x,t)|^2 dx)^\gamma \Delta_x u + \partial_t u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1) & \text{in } \Omega, \quad \Omega : \text{bounded in } \mathbb{R}^N \\ u(x,t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

[Optimal Decay] $\rho > 0, \gamma > 0$

$$(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega), u_0 \neq 0, \rho \ll 1$$

$$\Rightarrow C^{-1}(1+t)^{-\frac{1}{\gamma}} \leq \|\nabla_x^k u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(1+t)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (k=0,1,2)$$

3. Vlasov-Poisson-Fokker-Plank System:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f - \Delta_v f = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ -\Delta_x U = \gamma \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v,t) dv, \quad E = -\nabla_x U \\ f(x,v,0) = f_0(x,v) & \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad \gamma = \pm 1 \end{cases}$$

[Asymptotic Behavior] $1 \leq p \leq \infty$

$$f_0 \in L^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \|f_0\| \ll 1$$

$$\Rightarrow \|\nabla_x^\alpha \nabla_v^\beta f(t) - \nabla_x^\alpha \nabla_v^\beta h(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} \leq C t^{-\frac{1}{2}(3|\alpha|+|\beta|)} (1+t)^{-\frac{1}{2}-2N(1-\frac{1}{q})} \quad (1 \leq q \leq p)$$

where h is the solution of the linear Fokker-Plank system

内容:

関数解析的な手法を用いて、非線形現象を記述する非線形偏微分方程式の解構造の研究やエネルギーの減衰評価などに関する研究を行っている。

非線形方程式の研究では、対応する線形方程式の詳しい解析が必要となるが、その解析結果自体興味深いこともある。本研究室では、方程式の非線形性と解の属する関数空間の関係を調べたり、解の大域的可解性や解の爆発問題について研究を進めている。時間大域解については、その漸近挙動に興味があり、特に、エネルギー関数や解の導関数の減衰評価の改良およびその最適性について調べている。

非線形退化消散型Kirchhoff方程式はKirchhoffの非線形波動現象を記述する非線形偏微分方程式であり、この方程式の解は上と下から同じ多項式オーダーで減衰することを示すことのできる極めて興味深い方程式である。

プラズマ現象を記述するVlasov物理の基礎方程式として知られるVlasov-Poisson systemがFokker-Plankタイプの衝突項をもつ場合には、その解が対応する線形のFokker-Plank systemの解に漸近することが示せる。

分野:<数理科学>

専門:<非線形解析>

E-mail: k.ono@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7218

Fax: 088-656-7218

HP : <http://www-math.ias.tokushima-u.ac.jp/>



Faculty of
Science and
Technology
Tokushima University

整数論と代数系の応用

[キーワード: 代数体, 類数, 楕円曲線, 暗号]

教授 高橋浩樹

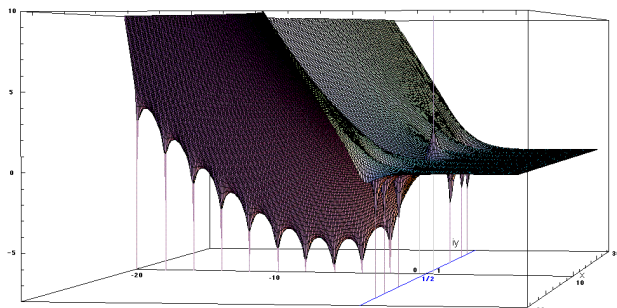


Fig.1 $\log|\zeta(s)|$ ($\zeta(s)$: リーマンゼータ関数)

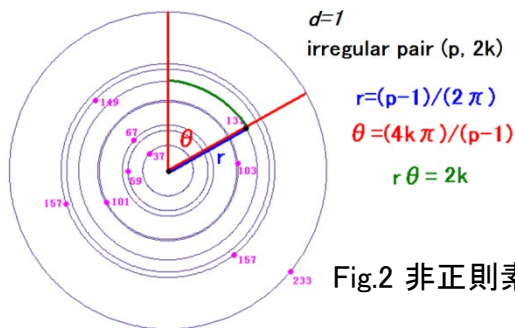


Fig.2 非正則素数および指数

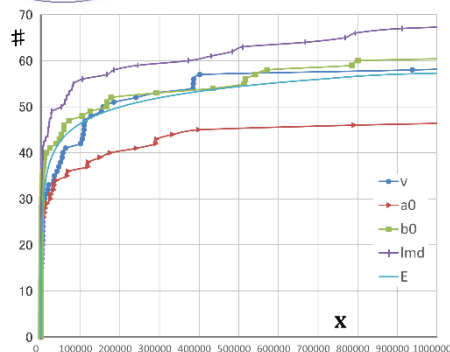


Fig.3 例外的な素数の個数

内容:

代数体のイデアル類群についての研究を進めている. 特に実円分体の類数に関する二つの予想, Greenberg予想およびVandiver予想について, 計算機を用いながら調査している. さらに, 研究対象の代数体や楕円曲線といった代数系は暗号理論とも密接な関係があり, これらの新たな応用についても考察している.

リーマンゼータ関数は多くの数学者に興味を持たれている関数である(cf. Fig.1). その特殊値は円分体のイデアル類群と深い関係がある(cf. Fig.2). この深い関係は, 実円分体の類数と単数群と円単数群の指数の一致として表現できる.

Greenberg予想はそれらのp部分が無限次 $\mathbb{Z}_p$ 拡大において有界であろうという予想であり, さらにVandiver予想は, p円分体に限ればそれらは自明であろうという予想である.

これまで, 円単数, ガウス和, p進L関数といった数論的特殊元と補助的な素数たちを用いて, これらの予想に取り組んできた. その結果, Greenberg予想が成立する実例や岩澤不変量が例外的な値となる素数たちを計算機を用いて数多く発見することが可能となった(cf. Fig.3).

分野: 数学

専門: 代数学

E-mail: hirokit@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7549

Fax: 088-656-7549

HP : [https://math0.pm.tokushima-u.ac.jp](https://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~hiroki/indexj.html)

[/~hiroki/indexj.html](https://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~hiroki/indexj.html)



薬物動態解析における数値計算法の研究

【キーワード:数値解析, 非線形最適化】 教授 竹内 敏己

$$S = 2! \sum_{j=1}^n \log \alpha(t_j; x) + \sum_{j=1}^n \frac{(q_j - \alpha(t_j; x))^2}{f \alpha(t_j; x) g^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{i! 2! 1! 2!}$$

(a) 非線形最適化における最小化関数

$C(t) = \alpha(t; V_d, V_{max}, K_m)$: 血中濃度

$$\frac{dX_a(t)}{dt} = -k_a X_a(t) \quad t_i \leq t < t_{i+1} \quad (i = 1; 2; \dots)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{F k_a X_a}{V_d} - \frac{V_{max} C}{V_d(K_m + C)}$$

$$X_a(t_i) = \begin{cases} < D_1 \\ D_1 + \lim_{t \rightarrow t_i^0} X_a(t) \end{cases} \quad C(t_i) = \begin{cases} < 0 \\ \lim_{t \rightarrow t_i^0} C(t) \end{cases} \quad i = 1, 2$$

(b) 薬物血中濃度が従う微分方程式 (フェニトイン)

図1 薬物動態解析におけるベイズ推定の例

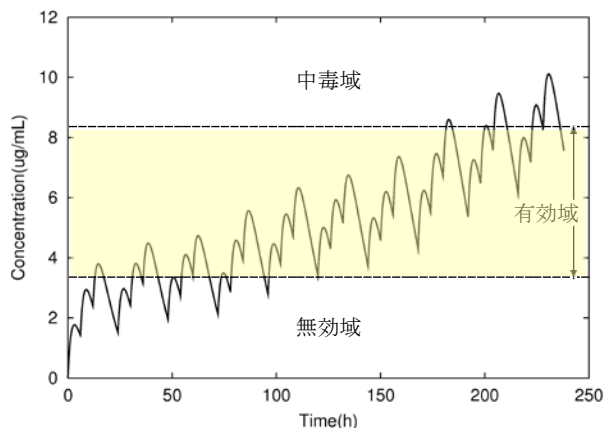


図2 薬物血中濃度のグラフと有効域の例

内容:

薬物治療において、患者の負担を軽減し治療を迅速に行うために、なるべく少ない回数のみ薬物血中濃度を測定し、測定結果から患者独自の薬物動態パラメータを推定して適切な投与計画を導き出す薬物動態解析は非常に重要である。薬物パラメータの推定には過去のデータから得られる母集団パラメータを用いたベイズ推定が有効である。ここで用いられる母集団パラメータとは、多くの患者の薬物血中濃度測定値を元に算出された薬物動態パラメータの平均や分散、パラメータ間の相関の強さ、さらに測定誤差を含めた血中濃度の患者内での変動の大きさ等を表す統計値である。母集団パラメータの算出、およびそれらの値を用いたベイズ推定においては、非線形最適化の数値計算が必要となる。このとき、薬剤によっては薬物血中濃度の理論値が非線形微分方程式で与えられる場合があり、計算過程において微分方程式を高精度で数値計算する必要が生じる。また、最適化の計算においては非線形性が強く、安定して数値解を得ることが困難なケースも多い。

そこで、母集団パラメータ算出のための母集団薬物動態解析、および患者独自のパラメータを推定するためのベイズ推定において、常に安定して高精度な数値解を得ることが可能な数値計算法を開発することを目的として研究を行っている。

分野:基礎数学・応用数学

専門:応用数学

E-mail: takeuchi@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7544

Fax: 088-656-7544



Faculty of
Science and
Technology
Tokushima University

自己相似性をもつグラフ族の生成と構造的性質の解明及び その応用に関する研究

【キーワード: 細分線グラフ, 一般化シェルピンスキーグラフ】

教授 蓮沼 徹

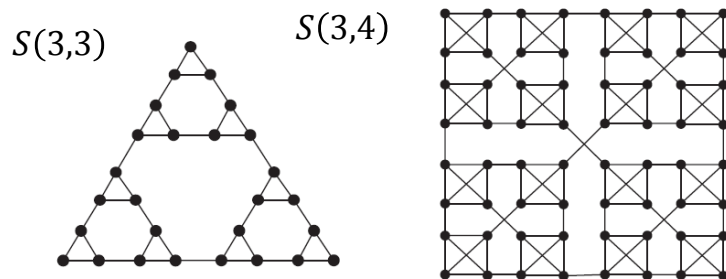


図1: Sierpiński グラフ

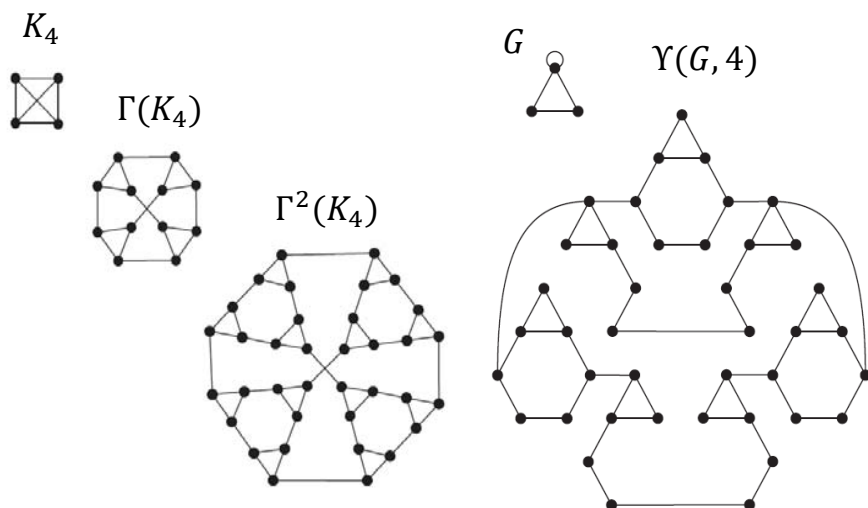


図2: 完全グラフ K_4 に対する
細分線グラフ演算の適用

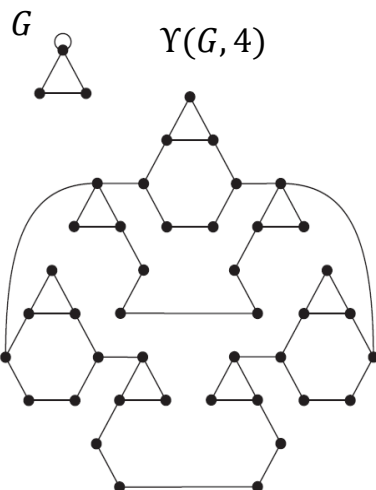


図3: Universalized
Sierpiński グラフ

内容:

自己相似性をもつグラフ族としてシェルピンスキーグラフ $S(n, k)$ が知られており, これまでに様々な性質が調べられている. このグラフはまた, 超並列計算機の相互結合網の一つとして提案されているWK-再帰網に同型であり, 相互結合網の観点からは拡張性に優れている. 本研究では主に相互結合網上の応用を考慮した構造的性質について調べることを目的とする.

本研究ではまず細分線グラフ演算というグラフ上の演算 Γ を新たに導入し, Γ を $S(n-1, k)$ に適用することにより $S(n, k)$ を生成することができることを示した. $S(n, k)$ は定義から k 個の $S(n-1, k)$ を組合せて構成することができるが, Γ による生成法を利用すると, $S(n, k)$ の様々な性質を調べやすくなり, $S(n, k)$ を含むより広いグラフ族である細分線グラフに対して, これまでに直径, 連結度, 辺素ハミルトン閉路, 各種支配集合, 完全独立全域木, 本型埋め込みといった相互結合網上の応用を考慮した構造的性質に関する結果を得ている. 本研究では細分線グラフ演算により生成されるグラフ族の他に, 普遍化シェルピンスキーグラフ (universalized Sierpinski graphs) $Y(G, n)$ を新たに定義し, その構造的性質についても調べている.

分野: 情報学基礎理論

専門: グラフ理論とその応用

E-mail: hasunuma@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7216

Fax: 088-656-7216



Faculty of
Science and
Technology
Tokushima University

3次元Lotka-Volterra競争系の極限周期軌道

[キーワード: 数理生物モデル, 分岐理論]

教授 村上公一

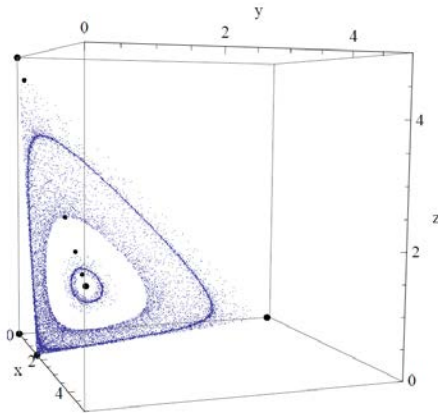


図1 解軌道: Zeemanの第27類での構成例

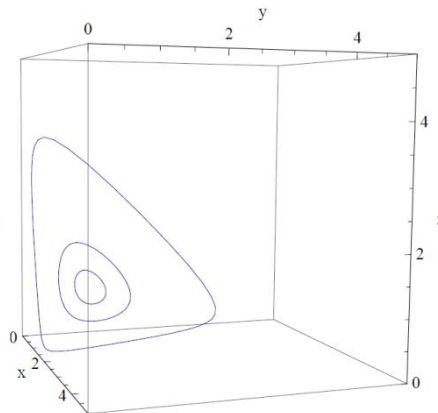


図2 極限周期軌道: Zeemanの第27類での構成例

内容:

2次元Lotka-Volterra方程式では、保存系を除き、極限集合は平衡点のみからなる。しかし、3次元Lotka-Volterra方程式では、複雑なアトラクターが存在しうる。

3次元Lotka-Volterra方程式であっても、競争系に限定すれば、解軌道の可能性は限られる。Hirschは、競争系には順序保存性があり、解は不変超曲面(環境単体)に漸近することを示した。環境単体上では、Poincare-Bendixsonの定理が成立するので、極限集合は平衡点、周期軌道、ヘテロクリニック軌道に限られる。Zeemanは、3次元Lotka-Volterra競争系の解軌道を33種類に分類し、そのうち6種類にHopf分岐の可能性を示した。HofbauerとSolは、Zeemanの第27類に対し、極限周期軌道が2個存在する例を与えた。

本研究では、3次元Lotka-Volterra競争系に対し、極限周期軌道が複数個存在する具体例の構成を目的とする。例えば、Zeemanの第27類に対して、我々が得た結果を数値シミュレーションで確認すると、図1のように、安定極限周期軌道が2個確認できる。不安定極限周期軌道も含めると、図2のように、3個の極限周期軌道が存在している。

分野: 数学解析

専門: 関数方程式

E-mail: murakami@ias.tokushima-u.ac.jp

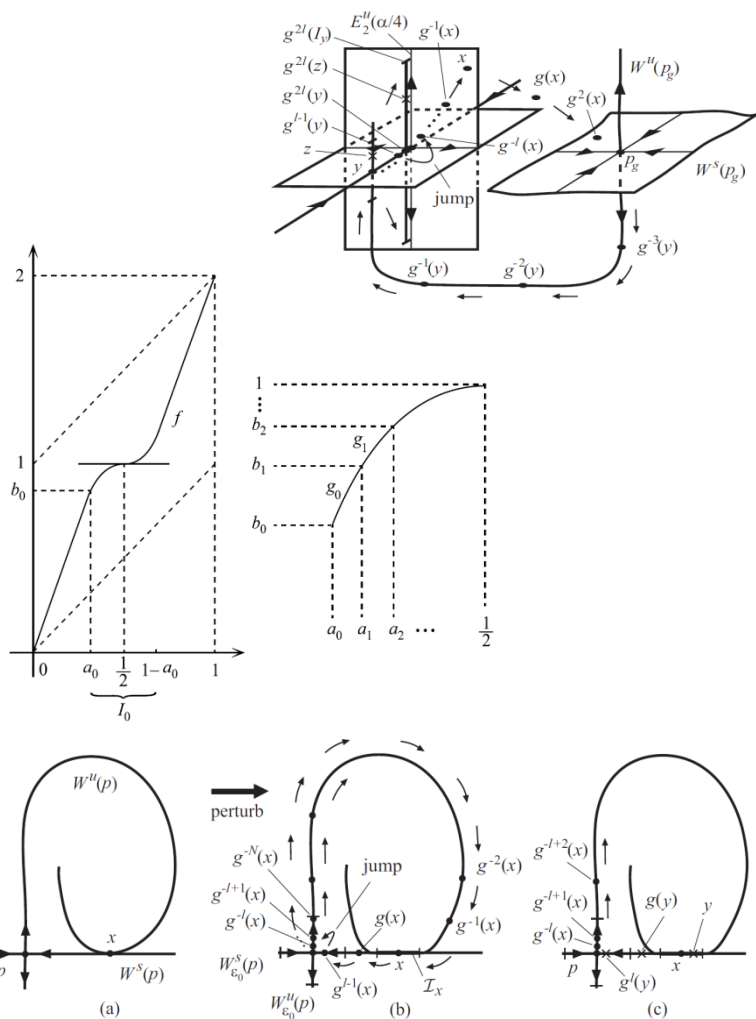
Tel. 088-656-7221

Fax: 088-656-7221

微分構造と位相的性質について

[キーワード: 一様・非一様双曲性, 安定性, Pesin集合] 教授 守安 一峰

〈図表〉



内容:

閉多様体上の系(微分可能な写像)がもつ微分構造と位相的な性質との関係は古くから研究され、多くの成果がある。例えば、一様双曲性と拡大性や追跡性との関係、非一様双曲性であるpartially hyperbolicやdominated splitting と位相推移性の関係などである。最近では、拡大性や追跡性などの位相的な性質を測度論的な視点から捉えなおした新たな概念が考えられ、一様双曲性をもつ集合との関係について調べられている。現状の研究成果は一様双曲性との関係に留まっているが、測度論の観点を加えることで非一様双曲性との関係を導くことが期待されている。

本研究では、一様双曲性に加えて非一様双曲性をもつ集合に対しても、これらの性質との関係について調べることが目的としている。特に、非一様双曲性をもつ集合のひとつであるPesin集合がもつ位相的な性質を明らかにすることで、測度論的な性質と位相的な性質の関連を見出すことができると考えている。

分野: 数物系科学

専門: 解析学基礎

E-mail: moriyasu@tokushima-u.ac.jp

Tel. <電話番号088-656-7220>

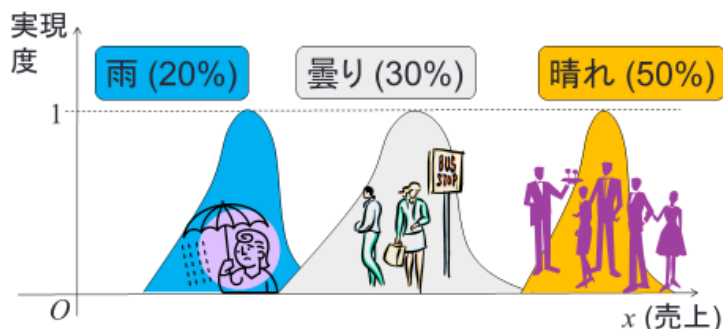
Fax: <fax番号088-656-7220>

曖昧性および確率的不確実性に耐える数理最適化

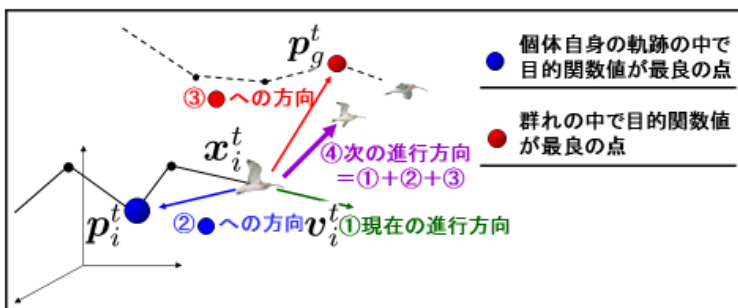
[キーワード:オペレーションズ・リサーチ(OR), ソフトコンピューティング] 准教授 宇野 剛史

ファジィランダム変数

例: ある遊園地の売上



粒子群最適化 (PSO)



$$v_i^{t+1} = \omega v_i^t + c_1 R_1^t (p_i^t - x_i^t) + c_2 R_2^t (p_g^t - x_i^t)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1}$$

内容:

数理最適化とは、利用可能な集合の中から何らかの条件の下で最良となる元を選ぶこととして定義される。研究者の取り組む分野の一つである商業施設の立地を例に挙げると、限られた予算や地域環境などの条件を数理モデル化した立地可能集合の中から最大の利益が見込まれる場所を探す問題として表現される。

現実の様々な問題に数理最適化を応用する際の問題の一つに不確実性が挙げられる。不確実性の要因として、天候や景気などのように確率的な不確実性を伴うものおよび人間の判断・評価などに含まれる曖昧性を伴うものが挙げられる。現実の問題ではこれらの不確実性を共に含むことから、これらを同時に表すことが可能なファジィランダム変数を用いて問題を数理的に表現するモデル化について研究している。

得られた問題は一般に決定事柄および制約条件が膨大かつ複雑な性質をもつ。このような問題を厳密に解くことは困難なことから、遺伝的アルゴリズム(GA)や粒子群最適化(PSO)などの進化的計算を用いて、問題の性質に応じて効率的に問題を解く手法についても研究している。

分野: 社会・安全システム科学

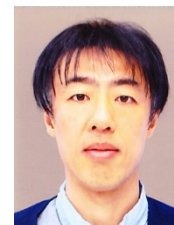
専門: 社会システム工学・安全システム

E-mail: uno.takeshi@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7294

Fax: 088-656-7294

HP : <http://www-math.ias.tokushima-u.ac.jp/~uno/>



非線形偏微分方程式の比較原理および強比較原理

[キーワード: 偏微分方程式, 粘性解]

准教授 大沼 正樹

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ (領域) とする. 対象となる非線形楕円型方程式は以下.

$$(1.1) \quad F(x, Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right), \quad D^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (u \text{ のヘッセ行列}).$$

$D^2u \in \mathbf{S}^N$ ($N \times N$ 実対象行列全体)

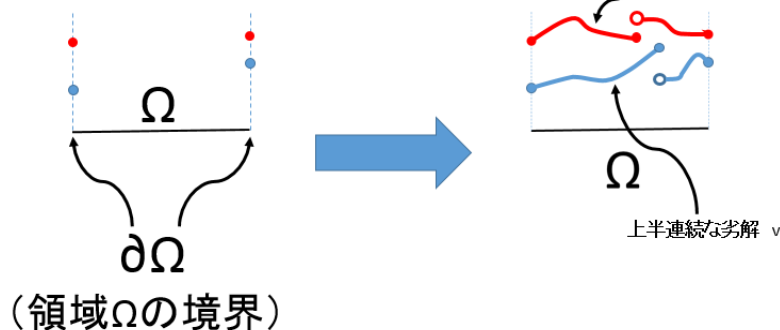
(1.1) の例 (グラフで表されている曲面の極小曲面方程式)

$$(1.2) \quad -\sqrt{1 + |Du|^2} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

(1.1) の例 (平均曲率方程式) $H \in C^1(\Omega)$: (与えられた関数)

$$(1.3) \quad \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = NH \quad \text{in } \Omega.$$

比較原理 (楕円型版)



内容:

非線形偏微分方程式の解に対して比較原理および強比較原理が成立することを示すことを目指している. 対象とする偏微分方程式としては非線形楕円型方程式と非線形放物型方程式である.

非線形楕円型方程式としては極小曲面方程式、平均曲率方程式、 p -ラプラス方程式を含む方程式のクラスを考察している. これらの方程式は良く知られているラプラス方程式とは異なり退化している. また、これらの時間発展版である非線形放物型方程式としては平均曲率流方程式、非等方的曲率流方程式、 p -ラプラス拡散方程式を含む方程式のクラスを考察している. これらも、熱伝導方程式と異なり退化している. 退化する方程式は、一般に古典解の存在は期待出来ない. そこで、粘性解と呼ばれる弱解を用いてこれらの方程式を研究している.

『楕円型版』: 比較原理とは方程式の半連続劣解と半連続優解が方程式を考察する領域の境界で比較されているときに、領域全体でのその比較が成立するという原理である.

強比較原理とは方程式の半連続劣解と半連続優解の比較が領域全体で成立し、それらの解が領域の内点で一致するならば、領域全体で劣解と優解は一致するという原理である.

分野: 数物系科学

専門: 数学

E-mail: ohnuma@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7225

Fax: 088-656-7225

リーマン多様体上の幾何解析

[キーワード: 極小超曲面, 幾何学的フロー]

准教授 國川慶太

単連結なコンパクト半単純対称空間: M

□ 対称性の高いリーマン多様体・リッチ曲率正

極小超曲面: $\Sigma \subset M$

□ 体積汎関数の臨界点

→ 体積汎関数の1階微分(第1変分)がゼロ

モース指数: $\text{index}(\Sigma)$

□ 体積汎関数のヘッシアン(第2変分)の指数

→ 極小超曲面の体積を減らす変形の数

第1ベッチ数: $b_1(\Sigma)$

□ 独立な1次元サイクルの数

定理(梶ヶ谷 - 國川 2025)

$$\text{index}(\Sigma) \geq C(M) \cdot b_1(\Sigma)$$

ただし、 $C(M)$ は M のみに依存する定数

内容:

リーマン多様体とは、局所的にはユークリッド空間のように見える曲がった空間であり、そこでは長さ・角度・体積などを測ることができる。そのような空間で、体積汎関数の臨界点となる超曲面を**極小超曲面**と呼ぶ。極小超曲面は石鹸膜の数理モデルとして古くから知られているが、現在でも多くの分野と関わり、活発な研究がなされている。

私の好みは解析的アプローチで幾何学的対象の性質を明らかにする幾何解析であり、極小超曲面やそれに関連して体積汎関数の負の勾配流である平均曲率流の研究を行っている。また、外側のリーマン多様体自体も研究対象であり、櫻井陽平氏との共同で**リッチフロー**や**調和写像**の研究にも取り組んでいる。

最近の梶ヶ谷徹氏との共同研究では、極小超曲面の不安定性と**トポロジー**の関係を扱った。極小超曲面は体積汎関数の臨界点にすぎず、必ずしも極小点とは限らない。第2変分が非負、つまり広義の極小点の場合を安定、そうでない場合を不安定という。その不安定さを測る指標が**モース指数**である。一方、多様体のトポジカルな複雑さを測る指標として**ベッチ数**というものがある。我々は、コンパクト対称空間という比較的広いクラスでも、極小超曲面の第1ベッチ数がモース指数によって上から評価されることを示した。

分野: 幾何学

専門: 極小超曲面や幾何学的フローの幾何解析

E-mail: kunikawa@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7228

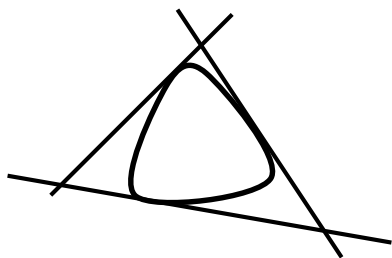
HP: <https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/~kunikawa>

平面曲線の埋込位相の研究

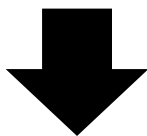
[キーワード: 平面曲線, 埋込位相, ガロア被覆]

准教授 白根 竹人

<図表>



3本の直線と非特異曲線
による平面曲線

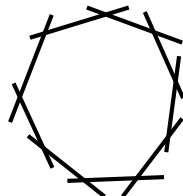
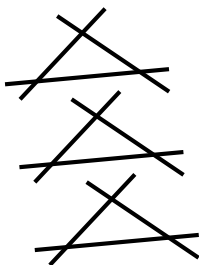


非特異曲線で分岐する
Galois被覆で3直線を
引き戻すと

複数の三角形に
分かれる場合

や

一つの多角形に
なる場合



などがあり, この違いが埋込位相の差を表す.

内容:

複素射影平面内の代数曲線(平面曲線)は特異点の位置によって埋込位相が異なる場合があることが知られている. つまり, ある平面曲線を連続的に変形してもたどり着けない特異点の配置があることがある. 私は埋込位相が異なるための条件を研究している.

複素射影平面は複素次元が2であるため「平面」と呼ばれているが, 実次元は4であり, 実際には「見えない」ところに難しさがある. 本研究では, 埋込位相を区別するための不変量という「言葉」を用いて, 埋込位相の違いを表現するという方針をとっている.

具体的には, 複素射影平面上のGalois被覆により平面曲線を引き戻すことで埋込位相の差が表れることが明らかになってきており, 本研究ではGalois被覆による引き戻しをより詳細に表現する不変量の「分解グラフ」を定義し, 埋込位相の異なる条件を求めている.

この分解グラフを用いることで, 三角形をなす3本の複素直線と1つの非特異平面曲線の和によってできる平面曲線の埋込位相を分類した.

分野: 代数学

専門: 平面曲線の埋込位相

E-mail: shirane@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7295

Fax: 088-656-7295

計算量理論

[キーワード: アルゴリズム, クラス P, クラス NP]

准教授 中山慎一

時間計算量

多項式時間

$O(\log n)$ $O(n)$

$O(n^2)$ $O(n^k)$



指数時間

$O(2^n)$ $O(2^{2n})$

$O(2^{n^2})$

(n は入力データのサイズであり, k は定数である.)

クラス分けにおける最も基本的なのは, 計算時間に関し, 多項式時間であるか, 指数時間であるかにより区別することである.

$P \neq NP$ 問題

NP

クラスNPは, 非決定性チューリングマシンを用い, 多項式時間で解を判定できる決定問題の集合である.

P

クラスPは, 効率的に解が求まる決定問題の集合である.

$P \neq NP$ 問題: クラスPとクラスNPが等しいか否かという問題である.

内容:

計算量理論は, 理論計算機科学における一分野であり, 計算問題を問題のもつ固有の難しさにより複数のクラスに分類したり, 分類したクラス間の関係を解明したりする.

計算量の一つの側面は, 問題を解くアルゴリズムに関する. アルゴリズムの計算量は, 与えられた問題の入力サイズに対し, 最悪の場合, 何ステップの計算が必要であることを示すものである. ステップ数は, 問題の入力サイズの関数の形式で表現される.

更に, 計算量理論は, 本質的に問題を解くことが可能か否か, つまり, 問題を解くのが本質的に難しいか易しいのかを解明することも含む. このクラス分けには, よく知られた重要なクラスとしてPやNPが存在し, また, クラスNP-完全, NP-困難はクラスNPに含まれるものである.

我々の分野では, 与えられた問題に対し, どのような計算クラスに属するか明らかにし, 現実的な時間で解を求めることが可能なクラスであるならば, 効率的なアルゴリズムを開発することである.

分野: 情報学基礎

専門: アルゴリズム

E-mail: shin@tokushima-u.ac.jp

Tel.: 088-656-7223

Fax: 088-656-7223

数論幾何学・数論的微分方程式

〔キーワード: 数論幾何, 数論的微分方程式〕

准教授 宮谷和亮

〈図表〉

複素線形微分方程式的な対象
e.g. 超幾何関数



p-進微分方程式



整数論的な対象
e.g. 有限体上の超幾何関数

内容:

数論幾何学という分野の研究を行っています. 数論幾何学とは, 複素幾何や複素解析をはじめとするさまざまな分野の数学の考え方をもとに, 整数に関する性質を調べる分野です.

中でも, 私は p-進微分方程式に特に強く興味を持っています. これは, 有理数や実数・複素数などをはじめとする「標数 0」の世界 ($1+1+1+\dots+1$ と 1 をいくら足しても 0 にならない世界) と, 有限体をはじめとする「標数 p」の世界 (1 を p 個足したものが 0 となる世界; p は素数) とをつなぐ数である, p-進数を舞台とする数学です. このような世界における関数や微分方程式は, 複素数の世界での関数や(線形)微分方程式に類似した見た目でありながら整数論的な情報も含むという, 不思議な性質を持つことがあります.

私はそのような対象のひとつとして, 一般の(1変数で, パラメーターの個数が任意の)超幾何微分方程式を調べ, これが有限体上の超幾何関数と呼ばれる代数的整数論的な対象と結びつくことを示しました.

現在も, p-進数や超幾何の世界を中心に, いろいろな関数の整数論的な見方を研究しています.

分野: 代数学

専門: 数論幾何

E-mail: miyatani@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7546

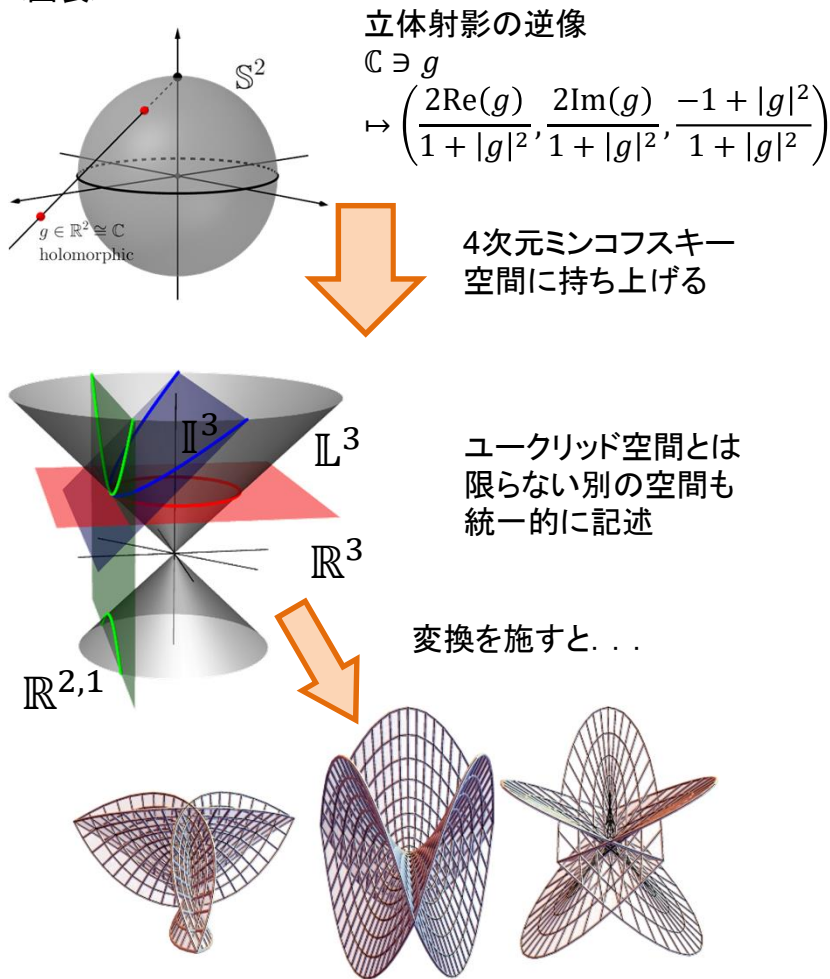
Fax:

HP : <https://math.miyatani.org/>

曲面と離散曲面の微分幾何の研究

[キーワード: 離散微分幾何, 可積分系] 准教授 安本真士

<図表>



さまざまな曲面・離散曲面を構成出来る

内容:

曲面の微分幾何学は、現代微分幾何学の根幹をなす、長い歴史を持つ重要な研究分野である。近年、コンピュータサイエンスや関連諸分野の発展とともに、従来の微分幾何学を離散的な土台のもとで再整備・再構築する研究が活発に行われている。

私は曲面と離散曲面の微分幾何の研究に取り組んでいる。微分幾何学の研究では、曲線や曲面などのある幾何的対象の曲がり具合を記述する「曲率」の概念が存在する。特定の曲率条件のもとでの微分幾何学の研究は、様々な数学研究が交錯し実に興味深い。

最近の研究では、3次元ユークリッド空間内の離散極小曲面（平均曲率が恒等的に零となる離散曲面）をはじめとする多くの離散曲面に対する構成法を、4次元ミンコフスキー空間内の離散曲面を展開することにより導出することに成功した。これにより、従来の離散曲面の構成法を統一的に導出するだけでなく、新たな離散曲面を構成することにも成功した。

分野: 幾何学

専門: 離散微分幾何

E-mail: yasumoto.masashi@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7297

Fax:

HP : <https://sites.google.com/site/homepageofmasashiyasumoto/home>

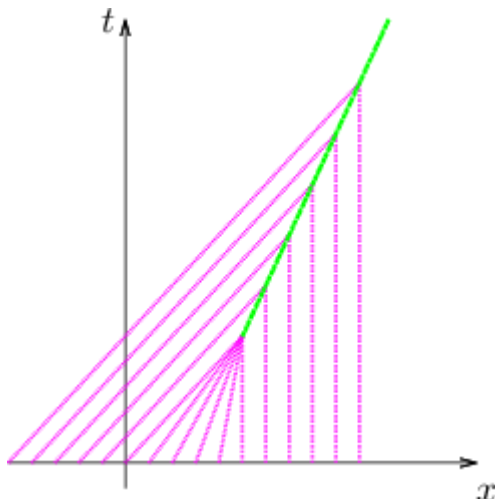
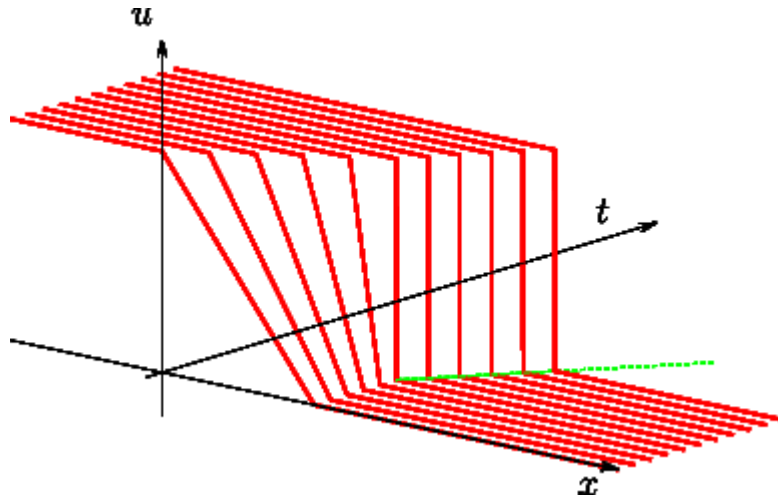


Faculty of
Science and
Technology
Tokushima University

双曲型保存則系の可解性

[キーワード: 微分方程式, 保存則]

講師 岡本邦也



内容:

一階準線形偏微分方程式系で記述される双曲型保存則系は、古くから研究されている。この方程式の特徴は、時間平滑化効果を持たないことのみならず、たとえ初期データが滑らかであっても、解は有限時間内に滑らかさを失う可能性をもつことにある。そのため、解の微分を広い意味に解釈した「弱解」と呼ばれる概念を導入し、所謂「衝撃波」のような不連続な関数をも許容する広いクラスにおいて可解性を考察する必要性が生じる。単独方程式の場合とは異なり、現在に至るまで保存則系の場合の可解性は未だ十分には確立されておらず、初期値が定常状態に十分に近いという強い制約の下に弱解が得られているに過ぎない。我々は、初期データが激しく振動する関数でその全変動量が小さくないような場合にも、Glimm型の相互作用評価の観点から、近似可解性並びに弱解の安定性について研究している。

分野: 解析学基礎

専門: 微分方程式論

E-mail: okamoto-kuniya@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-9441

Fax: 088-656-9441

HP :

定常Navier-Stokes方程式の数学解析

[キーワード: 流体数学, 偏微分方程式, 関数解析]

講師 鶴見裕之

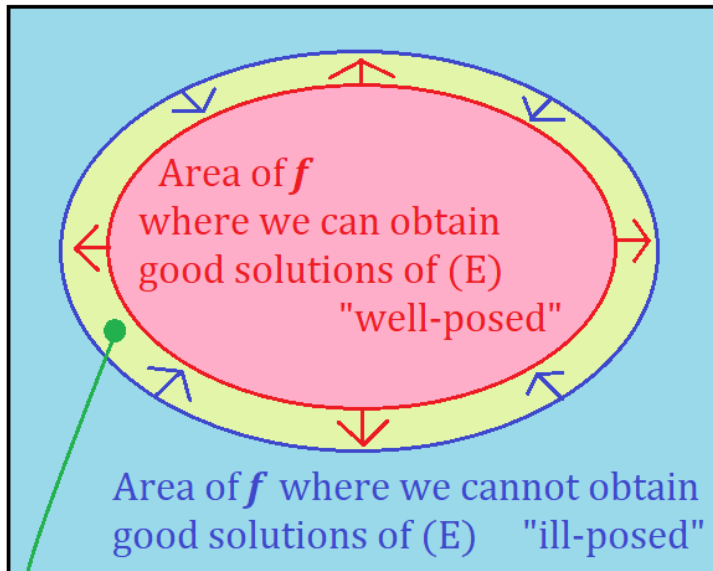
Stationary Navier-Stokes equations:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (\text{E})$$

$\mathbf{u}$: flow velocity, p : pressure $\leftarrow$ unknown

$\mathbf{f}$: external force $\leftarrow$ given

Image: Function spaces of $\mathbf{f}$



Where is the border line ?

内容:

時間による流量・流速の変化がない定常流体の挙動を記述するモデルである定常Navier-Stokes方程式に関心をもち、現在は本方程式の適切性(=与えられた外力に対する解の存在性, 一意性, ならびに連続依存性)および非適切性の成否に関して、解(流体の速度場)と外力の属する関数空間を用いた詳細な場合分けを行うことを目標として研究を行っている。

2次元全空間の場合においては、本方程式の解析は極めて難しい(Stokesのパラドクスと呼ばれる現象に由来する)。ただし特解(例: 一様流, 対称流, 回転流)周辺での適切性, および自明解(ゼロ解)周辺での非適切性については僅少なながら先行研究が存在する。そこでこれらを基に適切性・非適切性の両面で条件の一般化を図り、未だ研究の少ない2次元全空間での体系的な解析手法の構築を目指す。

分野: 数物系科学

専門: 数学

E-mail: tsurumi.hiroyuki@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7542

Fax: 088-656-7542

可換環の導来圏の研究

[キーワード: 可換環/スキーム, 導来圏]

講師 松井 紘樹

<図表>

テンソル三角幾何学: Balmer (2005)

$$X \cong \mathrm{Spec}_{\otimes}(\mathrm{D}^{\mathrm{pf}}(X))$$



テンソル構造を忘れる

“tensor-free”な三角幾何学: Matsui (2021)

$$X \subseteq \mathrm{Spec}_{\Delta}(\mathrm{D}^{\mathrm{pf}}(X))$$

X の幾何学的な情報(左辺)と $\mathrm{D}^{\mathrm{pf}}(X)$ の
(テンソル)三角圏構造(右辺)を結びつける!!

内容:

可換環の表現論において古典的であり重要な問題は全ての加群を分類することである。しかしながら、この問題は一般に非常に困難なものであり、単純特異点と呼ばれるよい特異点を持つ場合でしか完全な解決はされていない。

部分圏の分類問題とは、与えられた圏の対象の集まり(部分圏)を分類するという問題で、上記のような個々の対象(加群)を全て分類する問題よりも扱いやすい問題であり、これまでにさまざまな圏の部分圏の分類が知られている。

私の研究の目的は、与えられた可換環またはもっと一般にスキーム X に対して、その種々の導来圏の構造と元のスキームの幾何学的な性質を部分圏の分類を通して結びつけることである。2005年にBalmerはテンソル三角幾何学という理論を創始し、ネータースキーム X の完全導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{pf}}(X)$ のテンソル三角圏構造から元の X が完全に復元できることを示している。しかしながら、テンソル構造は強い構造であり、自然なテンソル構造を持たない三角圏も多々存在する。

私は、これまでの研究でBalmerの理論をテンソル構造を用いずに一般の三角圏へ拡張することに成功した。Balmerの理論がそうであったように、この理論は可換環論のみならず代数幾何学、有限群の表現論、安定ホモトピー論等のさまざまな分野へ応用されることが期待される。

分野: 代数学

専門: 可換環論

E-mail: hmatsui@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7296

Fax: 088-656-7296