Faculty of Science and Technology
Tokushima University

非線形現象の数理モデルと数学解析

[キーワード：非線形解析，エネルギー減衰，PDEs]

教授　小野　公輔

1. Linear Dissipative Wave Equation:

$$\begin{cases} (\Box + \partial_t)u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

[Energy Decay in Energy Spaces]

$(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$

$\Longrightarrow$

$E(u(t), \partial_t u(t)) \leq C(1+t)^{-1}$

[Sharp Decay]　$m \geq 0$, $N = 2n$ or $2n+1$

$(u_0, u_1) \in \left(H^{m+1}(\mathbb{R}^N) \cap W^{n,1}(\mathbb{R}^N)\right) \times \left(H^m(\mathbb{R}^N) \cap W^{n-1,1}(\mathbb{R}^N)\right)$

$\Longrightarrow$

$\|\partial_t^k \nabla_x u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C(1+t)^{-k-\frac{|\beta|}{2}-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{q})}$

$(1 \leq q \leq 2,\ 0 \leq k + |\beta| \leq m,\ k \neq m)$

2. Nonlinear Degenerate Dissipative Kirchhoff Equation:

$$\begin{cases} \rho\partial_t^2 u - \left(\int_\Omega |\nabla_x u(x,t)|^2 dx\right)^\gamma \Delta_x u + \partial_t u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1) \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \Omega: \text{bounded in } \mathbb{R}^N \\ u(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \end{cases}$$

[Optimal Decay]　$\rho > 0$, $\gamma > 0$

$(u_0, u_1) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega)$, $u_0 \neq 0$, $\rho \ll 1$

$\Longrightarrow$

$C^{-1}(1+t)^{-\frac{1}{\gamma}} \leq \|\nabla_x^k u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(1+t)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (k = 0, 1, 2)$

3. Vlasov-Poisson-Fokker-Plank System:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f - \Delta_v f = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ -\Delta_x U = \gamma \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v,t)\, dv, \quad E = -\nabla_x U \\ f(x,v,0) = f_0(x,v) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad \gamma = \pm 1 \end{cases}$$

[Asymptotic Behavior]　$1 \leq p \leq \infty$

$f_0 \in L^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\|f_0\| \ll 1$

$\Longrightarrow$

$$\|\nabla_x^\alpha \nabla_v^\beta f(t) - \nabla_x^\alpha \nabla_v^\beta h(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(3|\alpha|+|\beta|)}(1+t)^{-\frac{1}{2}-2N(1-\frac{1}{q})} \quad (1 \leq q \leq p)$$

where h is the solution of the linear Fokker-Plank system

内容：

関数解析的な手法を用いて，非線形現象を記述する非線形偏微分方程式の解構造の研究やエネルギーの減衰評価などに関する研究を行っている。

非線形方程式の研究では，対応する線形方程式の詳しい解析が必要となるが，その解析結果自体興味深いこともある。本研究室では，方程式の非線形性と解の属する関数空間の関係を調べたり，解の大域的可解性や解の爆発問題について研究を進めている。時間大域解については，その漸近挙動に興味があり，特に，エネルギー関数や解の導関数の減衰評価の改良およびその最適性について調べている。

非線形退化消散型Kirchhoff方程式はKirchhoffの非線形波動現象を記述する非線形偏微分方程式であり，この方程式の解は上と下から同じ多項式オーダーで減衰することを示すことのできる極めて興味深い方程式である。

プラズマ現象を記述するVlasov物理の基礎方程式として知られるVlasov−Poisson　systemがFokker−Plankタイプの衝突項をもつ場合には，その解が対応する線形のFokker−Plank systemの解に漸近することが示せる。

分野：<数理科学>

専門：<非線形解析>

E-mail: k.ono@tokushima-u.ac.jp

Tel.　088-656-7218

Fax:　088-656-7218

HP：http://www-math.ias.tokushima-u.ac.jp/