パンルヴェ方程式の大域解析

［キーワード：古典解析学，モノドロミ、漸近解析］　教授　大山　陽介

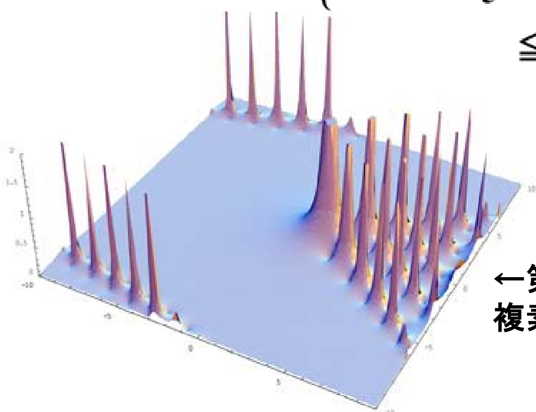
第1パンルヴェ方程式の楕円漸近解析

$$y'' = 6y^2 + x$$

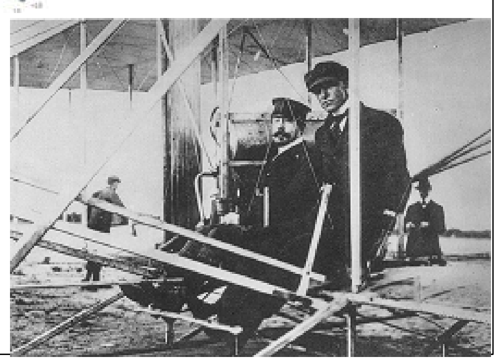
$$y(x) \sim |x|^{1/2}\wp\left(\frac{4}{5}e^{i\varphi}|x|^{5/4} - t(\varphi, s); g_2(\varphi), g_3(\varphi)\right) + O(|x|^{3/4}),$$

$$t(\varphi, s) = \frac{1}{2\pi i}\left(\omega_a(\varphi)\log(is_{2-2k}) + \omega_b(\varphi)\log\frac{s_{5-2k}}{s_{2-2k}}\right)$$

$$x \in D_k(\varphi, \varepsilon, s) = \left\{x \in \mathbb{C}; \frac{(3+2k)\pi}{5} + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \frac{(5+2k)\pi}{5} - \varepsilon\right\}$$



←第1パンルヴェ函数の複素平面での極の位置



後に仏首相をつとめたPaul Painlevéは1908年に世界で始めて飛行機に乗った数学者でもある。左がPainlevé，右が操縦者であるライト兄弟の兄Wilber

内容：

微分方程式の解をある点の近くで求めた後、その解が遠方でどういう振る舞いを示すのか調べることは、数理科学では基本的な問題である。しかし、**微分方程式の大域問題**は線型方程式の場合ですら完全に解くのは困難である。

「**パンルヴェ方程式**」は1900年頃に発見された非線型微分方程式である。その解は複素領域内でどこまでも解析接続可能という性質を持っている（パンルヴェ性）。このため、非線型方程式でありながら大域的性質が調べやすく「非線型特殊函数」という側面を持っている。また、パンルヴェ方程式は線型微分方程式の「**モノドロミ保存変形**」として得られることから、パンルヴェ方程式の局所解がわかれば、対応する線型方程式の大域構造を決定できる。線型方程式の大域構造→パンルヴェ方程式の局所的挙動→パンルヴェ方程式の大域構造というステップで非線型方程式であるパンルヴェ方程式の解の全体の構造を把握できる･･･というのが戦略である。代数幾何や表現論など代数的な手法と解析的な手法を合わせて攻略しつつ、数理物理学など応用数学のアイデアを逆に純粋数学に取り入れて解析していく必要がある。

分野：数学

E-mail: ohyama@tokushima-u.ac.jp

Tel. 088-656-7541

Fax: 088-656-7541

HP :http://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~ohyama/index.html